数理解析研究所講究録
1501 巻 2006 年 18-30

2-multiarrangements の exponents について

若神子 篤史 (Atsushi Wakamiko)
北海道大学 理学研究科 数学専攻
Depertment of Mathematics, Hokkaido University

概要. 近年, G. M. Ziegler [Zi] に始まる多重配置の概念は, 超平面配置という分野, 特に自由性を扱う部分において, その有効性を示しつつある. 例えば, M. Yoshinaga [Yo2] では, 3 次元の超平面配置 $\mathcal{A}$ の自由性を, その特性多項式と呼ばれるものと, 超平面 $H \in \mathcal{A}$ に "制限" して得られる H 内の多重配置 $(\mathcal{A}^H, k)$ の冪指数を用いて記述している. [Wa] では, この結果の重要性を認識し, 2 次元多重配置の冪指数を, とても重要な量であると捉え, その "決定" に取り組んだ. 実際は, 3 本の直線 (2 次元空間の中の超平面) からなる, 2 次元多重配置を扱っている. 本紙では, RIMS における講演 [1] を基に, [Wa] で得られた結果, 及びその説明を与えていく.

Key word : multiarrangement, exponents, generalized binomial coefficient, Schur function.

1 超平面配置からの準備

まず, 超平面配置に関する用語・記号を準備していく. V を, 標数 0 の体 $\mathbf{K}$ 上の ℓ $(\in \mathbf{Z}_{>0})$ 次元ベクトル空間とし, V の双対空間 V^* の対称代数を $S = S(V^*)$ で表す事にする. また, Der_S で, S 上の $\mathbf{K}$-導分全体のなす S-加群を表す事にする. $(x_1, \cdots, x_\ell)$ を V^* の $\mathbf{K}$-基底とすれば, $S = \mathbf{K}[x_1, \cdots, x_\ell]$ であり, $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_\ell})$ は, Der_S の基底を与える. 但し, $\frac{\partial}{\partial x_j}: S \longrightarrow S$ は x_j に関する偏微分作用素である. この作用素の次数を 0 として, Der_S に次数加群の構造を与えておく.

$\mathcal{A}$ を V 内の超平面配置 (arrangement), 即ち V の超平面 (hyperpalne) の有限集合とする. 但し, ここでは, V の余次元 1 の線型部分空間を超平面と呼ぶ事にする. 各 hyperplane $H \in \mathcal{A}$ に, 自然数を対応させる写像 $k: \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{N} = \mathbf{Z}_{\geq 0}$ を $\mathcal{A}$ 上の**重複度 (multiplicity)** と呼び, $\mathcal{A}$ と multiplicity k との組 $(\mathcal{A}, k)$ を, V 内の**多重配置 (multiarrangement)** と呼ぶ (G. M. Ziegler [Zi]). 典型的な例として, arrangemnet $\mathcal{A}$ の hyperplane $H \in \mathcal{A}$ への "制限" $(\mathcal{A}^H, k)$ がある. 但し, $\mathcal{A}^H := \{ H' \cap H \mid H' \in \mathcal{A} \setminus \{H\} \}$, その上の multiplicity $k: \mathcal{A}^H \longrightarrow \mathbf{N}$ は, $k(X) := \#\{ H' \in \mathcal{A} \setminus \{H\} \mid H' \cap H = X \}$ で与えられている. 今後, V 内の (multi)arrangement を "ℓ-(multi)arrangement" と呼ぶことにする. ℓ-multiarrangement $(\mathcal{A}, k)$ に対し, 多項式 $Q(\mathcal{A}, k) \in S$ を

$$Q(\mathcal{A}, k) := \prod\nolimits_{H \in \mathcal{A}} {\alpha_H}^{k(H)}$$

で定める. 但し, 超平面 H に対し, 線型形式 $\alpha_H \in V^*$ は H の定義式である: $\ker \alpha_H = H$. $H \subseteq V$ を超平面とし, m を自然数とする. 導分 $\theta \in \mathrm{Der}_S$ が, "$\theta(\alpha_H) \in {\alpha_H}^m S$" を満たす

[1] RIMS 研究集会 : Recent Topicis on Real and Complex Singularities, 2005 年 11 月 28 日

とき, "θ は, H に m 重に接する" と表現する. また, $(\mathcal{A},k)$ を ℓ-multiarrangement としたとき, 各 $H \in \mathcal{A}$ に, $k(H)$ 重に接するような $\theta \in \mathrm{Der}_S$ を "$(\mathcal{A},k)$ に接する" と表現し, その全体を $\mathsf{D}(\mathcal{A},k)$ で表すことにする:

$$\mathsf{D}(\mathcal{A},k) := \{\ \theta \in \mathrm{Der}_S \mid \theta(\alpha_H) \in {\alpha_H}^{k(H)} S \quad (\forall H \in \mathcal{A})\ \}.$$

これは, Der_S の斉次部分加群である. この加群 $\mathsf{D}(\mathcal{A},k)$ が S-加群として自由である時, multiarrangement $(\mathcal{A},k)$ は**自由** (**free**) であるという. この時, $\mathsf{D}(\mathcal{A},k)$ の rank は $\dim_{\mathbf{K}} V = \ell$ に等しく, 斉次基底 (= 斉次元からなる基底) $\theta_1,\cdots,\theta_\ell$ が取れる. 斉次元 θ_j の次数 $\deg\theta_j$ を free multiarrangement $(\mathcal{A},k)$ の**冪指数** (**exponent**) と呼び, 多重集合 $[\deg\theta_1,\cdots,\deg\theta_\ell]$ を $\exp(\mathcal{A},k)$ で表す. (これは, 斉次基底 $(\theta_1,\cdots,\theta_\ell)$ の取り方に依らないで, $(\mathcal{A},k)$ だけによって定まる量である. また, この多重集合を "冪指数達" という意味合いを込めて, "exponents" と呼ぶことにする.) さて, 2 次元の multiarrangement に関しては, G. M. Ziegler [Zi, Corollary 7] によって, いつもその freeness が保障されている:

定理 1.1 任意の 2-multiarrangement $(\mathcal{A},k)$ は free である.

即ち, 2-multiarrangement に関しては, 必ずその exponents が定まるわけである. [Wa] では, $|\mathcal{A}| = 3$ であるような, 任意の 2-multiarrangement $(\mathcal{A},k)$ に対して, その exponents を求め, もっと具体的に, $\mathsf{D}(\mathcal{A},k)$ の斉次基底を構成している. その基底を記述するものとして, "一般二項係数" と呼ばれるものが用いられる. 次節で, I. G. Macdonald [Ma] に従い, 一般二項係数を導入し, [Wa] における主定理を述べる.

2 主定理

定義 2.1 $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$ を数の分割 (partition) とする: (1) $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,$ は自然数の減少列で, (2) "$n > N \Rightarrow \lambda_n = 0$" を満たす $N \in \mathbf{Z}_{>0}$ が存在. この時, 多項式 $\binom{X}{\lambda} \in \mathbf{Q}[X]$ を

$$\binom{X}{\lambda} := \prod_{P \in \mathbf{Y}(\lambda)} \frac{X - c(P)}{h_\lambda(P)} \tag{2.1}$$

で定め, このような多項式を**一般二項係数** (**generalized binomial coefficient**) と呼ぶ.

式 (2.1) に出てくる記号, $\mathbf{Y}(\lambda)$, $c(P)$, $h_\lambda(P)$ は以下の通りである:

- $\mathbf{Y}(\lambda) = \{\ (i,j) \in {\mathbf{Z}_{>0}}^2 \mid j \le \lambda_i\ \}$.
- $c(P) = j - i$. ($P = (i,j) \in {\mathbf{Z}_{>0}}^2$.)
- $h_\lambda(P) := |\mathbf{Y}(\lambda) \cap H_P|$. 但し, H_P は $P = (i_0,j_0) \in {\mathbf{Z}_{>0}}^2$ を直角とする "hook" である: $H_P = \{\ (i_0,j) \mid j_0 \le j \in \mathbf{Z}_{>0}\ \} \cup \{\ (i,j_0) \mid i_0 \le i \in \mathbf{Z}_{>0}\ \}$.

$\mathbf{Y}(\lambda)$ は partition $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\cdots)$ のヤング図形 (Young diagram) と呼ばれるもので, これを λ_1 個, λ_2 個, $\cdots$ の正方形を並べて表現したりすることがある. また, $h_\lambda\colon {\mathbf{Z}_{>0}}^2 \longrightarrow \mathbf{N}$

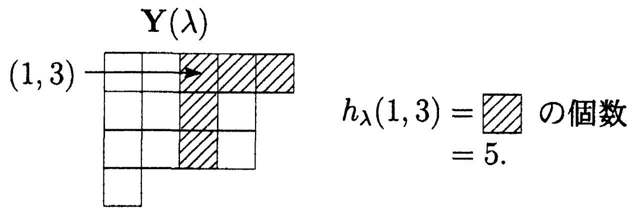

図 2.1: the hook length function h_λ

は hook length function と呼ばれる事がある. (例. $\lambda = (5,4,4,1) = (5,4,4,1,0,0,\cdots)$ の時, $h_\lambda(1,3) = 5$ である. 図 2.1 を参照.)

"一般二項係数" と表現する理由. n を自然数とし, $\lambda := (n,0,0,\cdots)$ と置く. この時, partition λ の定める一般二項係数を定義に従って求めると,

$$\binom{X}{\lambda} = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!} = \binom{X}{n}$$

となり, 通常の二項係数に一致する. 即ち, $n \mapsto (n,0,0,\cdots)$ なる対応によって, 自然数 $n \in \mathbf{N}$ を特別な partition だとみなした時, 定義 2.1 は, $\binom{X}{\lambda}$ の定義を, 任意の partition λ に拡張したものだと考えられる. そこで, この多項式を "一般二項係数" と呼んでいる.

以下, $\mathbf{K}$-ベクトル空間 V の次元は 2 であるとし, 引き続き S で V^* の対称代数, Der_S で S 上の $\mathbf{K}$-導分全体を表す事にする. 主定理を述べる為に記号をいくつか準備する:

- $|k| := k_1 + k_2 + k_3$. $(k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbf{N}^3.)$
- $\mathbf{Z}_k := \{\ q \in \mathbf{Z} \mid (|k|-1)/2 \le q \le k_1 + k_2 - 1\ \}$. $(k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbf{N}^3.)$
- $\begin{cases} r_{k,q} := k_1 + k_2 - q - 1 \\ s_{k,q} := k_1 + k_3 - q - 1 \end{cases}$. $(k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbf{N}^3,\ q \in \mathbf{Z}.)$
- $\mathbf{N}_0^3 := \{\ k = (k_1,k_2,k_3) \in \mathbf{N}^3 \mid \max\{k_1,k_2\} \le k_3\ \}$.

$\Sigma = (x,y)$ を V^* の $\mathbf{K}$-基底とする. $q \in \mathbf{Z}_k$ を満たす, 各 $(k,q) \in \mathbf{N}_0^3 \times \mathbf{Z}$ に対して, q 次の導分

$$\left(\sum_{j=1}^{q-k_1+1} \binom{k_3}{\lambda_{k,q}^{(j)}} x^{q+1-j} y^{j-1}\right) \frac{\partial}{\partial x} + (-1)^{r_{k,q}} \left(\sum_{j=k_2+1}^{|k|-q} \binom{k_3}{\lambda_{k,q}^{(j)}} x^{q+1-j} y^{j-1}\right) \frac{\partial}{\partial y}$$

を $\theta_\Sigma(k,q)$ と置く. 但し, $\lambda_{k,q}^{(j)}$ は以下のような partitions である:

$$\lambda_{k,q}^{(j)} := \begin{cases} (k_3 - j + 1, \underbrace{s_{k,q}+1, \cdots, s_{k,q}+1}_{r_{k,q}}) & j = 1, \cdots, q - k_1 + 1, \\ (\overbrace{s_{k,q}, \cdots, s_{k,q}}^{r_{k,q}}, |k| - q - j) & j = k_2 + 1, \cdots, |k| - q. \end{cases}$$

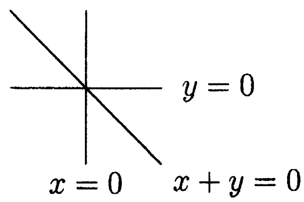

図 2.2: 2-arrangement $\mathcal{A}_\Sigma$

V^* の **K**-基底 $\Sigma = (x, y)$ に対し, $\mathcal{A}_\Sigma := \{\ \ker x,\ \ker y,\ \ker(x+y)\ \}$ と定める. 更に, $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbf{N}_0^3$ に対して, $\ker x \mapsto k_1$, $\ker y \mapsto k_2$, $\ker(x+y) \mapsto k_3$ で定められる $\mathcal{A}_\Sigma$ 上の multiarrangement を $\mathcal{A}_{\Sigma,k}$ で表す. 任意の 2-multiarrangement は, V^* の **K**-基底を "上手く" 取る事により, $\mathcal{A}_{\Sigma,k}$ $(k \in \mathbf{N}_0^3)$ と書ける事に注意する. (言い換えれば, $\mathcal{A}_{\Sigma,k}$ という表示は, 3 本の直線からなる 2-multiarrangement の表示として一般性を失わない, と言う事ができる.) 次が [Wa] における主定理である:

定理 2.2 ([Wa], Theorems 1.2 and 3.12) $\Sigma = (x, y)$ を V^* の **K**-基底とする. $\mathbf{N}_0^3$ の元 $k = (k_1, k_2, k_3)$ を任意に取り, $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}_{\Sigma,k}$ と置く.

(i) $k_1 + k_2 - 1 \le k_3$ の時. この時, $\exp(\tilde{\mathcal{A}}) = [k_3, k_1 + k_2]$ で,
$$\Big(\ f\,\frac{\partial}{\partial x} + g\,\frac{\partial}{\partial y},\ x^{k_1}\,y^{k_2}\,\big(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\big)\ \Big)$$
は $\mathsf{D}(\tilde{\mathcal{A}})$ の斉次基底を与える. 但し $f = \sum_{j=k_1}^{k_3} \binom{k_3}{j}\,x^j\,y^{k_3-j}$, $g = \sum_{j=0}^{k_1-1} \binom{k_3}{j}\,x^j\,y^{k_3-j}$.

(ii) $k_3 < k_1 + k_2 - 1$ の時. この時, $\exp(\tilde{\mathcal{A}}) = [\,\lfloor |k|/2 \rfloor, \lceil |k|/2 \rceil\,]$ で, $|k|$ が偶数の時は,
$$\Big(\ \theta_\Sigma(k, \lfloor |k|/2 \rfloor),\ \theta_\Sigma(k', \lceil |k|/2 \rceil)\ \Big)$$
が $\mathsf{D}(\tilde{\mathcal{A}})$ の斉次基底を与え, $|k|$ が奇数の時は,
$$\Big(\ \theta_\Sigma(k, \lfloor |k|/2 \rfloor),\ \theta_\Sigma(k, \lceil |k|/2 \rceil)\ \Big)$$
が $\mathsf{D}(\tilde{\mathcal{A}})$ の斉次基底を与える. 但し, $k' = k + (0, 0, 1) \in \mathbf{N}_0^3$. また, 実数 $a \in \mathbf{R}$ に対して, $\lfloor a \rfloor := \max\{\ m \in \mathbf{Z} \mid m \le a\ \}$, $\lceil a \rceil := \min\{\ m \in \mathbf{Z} \mid a \le m\ \}$ である.

上の定理の (i) ($k_1 + k_2 - 1 \le k_3$ の場合) は, 通常 "二項定理" と呼ばれる定理から, 直ちに示されるものである. その証明を与えておく.

定理 2.2 (i) の証明. $\theta_1 := f\,\frac{\partial}{\partial x} + g\,\frac{\partial}{\partial y}$, $\theta_2 := x^{k_1}\,y^{k_2}\,\big(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\big)$ と置く. まず, f の定義より, θ_1 が直線 $x = 0$ に k_1 重に接する事が言える: $\theta_1(x) = f \in x^{k_1} S$. また, 仮定 $k_1 + k_2 - 1 \le k_3$ より, "$j < k_1 \Rightarrow k_2 \le k_3 - j$" が成立つ. 故に, θ_1 は $y = 0$ に k_2 重に接する: $\theta_1(y) = g \in y^{k_2} S$. 更に, 二項定理から, $\theta_1(x + y) = f + g = (x + y)^{k_3}$ が言える. 結局 θ_1 が multiarrangement $\mathcal{A}_{\Sigma,k}$ に接することが示せた. 同様に, $\theta_2 \in \mathsf{D}(\mathcal{A}_{\Sigma,k})$ である事も容易に示せる: $\theta_2(x) = -x^{k_1}\,y^{k_2}$, $\theta_2(y) = x^{k_1}\,y^{k_2}$, $\theta_2(x + y) = 0$.

ここで, 自由性に関する判定法, **Saito's criterion** [OT, Theorem 4.19], [Sa1, p.270] の "multi-version" とでも言うべき, 以下の判定法を用意しておく:

定理 2.3 (Ziegler's criterion [Zi]) $(\mathcal{A}, k)$ を ℓ-multiarrangement とし, $\theta_1, \cdots, \theta_\ell$ を $(\mathcal{A}, k)$ に接する導分とする: $\theta_1, \cdots, \theta_\ell \in \mathsf{D}(\mathcal{A}, k)$. この時,

$$\theta_1, \cdots, \theta_\ell : \text{a basis for } \mathsf{D}(\mathcal{A}, k) \iff \det(\theta_j(x_i))_{ij} \doteq Q(\mathcal{A}, k).$$

但し, $(x_1, \cdots, x_\ell)$ は V^* の $\mathbf{K}$-基底. 行列 $(\theta_j(x_i))_{ij}$ は $\theta_1, \cdots, \theta_\ell$ の (基底 $(x_1, \cdots, x_\ell)$ に関する) "係数行列" と呼ばれるものである. これを $\mathtt{M}(\theta_1, \cdots, \theta_\ell)$ などと記す. ▮

さて, θ_1, θ_2 の係数行列 $\mathtt{M}(\theta_1, \theta_2)$ の行列式を計算すると,

$$\det \mathtt{M}(\theta_1, \theta_2) = x^{k_1}\, y^{k_2} \begin{vmatrix} f & -1 \\ g & 1 \end{vmatrix} = x^{k_1}\, y^{k_2}\, (x+y)^{k_3}.$$

故に, 定理 2.3 (Ziegler's criterion) より, θ_1, θ_2 は $\mathsf{D}(\mathcal{A}_{\Sigma,k})$ の斉次基底である. ▮

$k_3 < k_1 + k_2 - 1$ の場合では, 二項定理を使った今の議論が使えない. 定理 2.2 の (ii) は, 一般二項係数を用いて, 言わば "二項定理の一般化" みたいなものを与えてる, といってもよいかもしれない. (ii) の証明の概要は, 後で与える事にして, 二つほど具体例を見ていく.

例 2.4 $k = (4,4,4)$ の時. この時, $|k|/2 = 6$, $r_{k,6} = r_{k',6} = 1$, $s_{k,6} = 1$, $s_{k',6} = 2$ で, 更に

$$\lambda_j := \lambda_{k,6}^{(j)} = \begin{cases} (5-j, 2) & \text{if } j = 1,2,3 \\ (1, 6-j) & \text{if } j = 5,6 \end{cases}, \quad \mu_j := \lambda_{k',6}^{(j)} = \begin{cases} (6-j, 3) & \text{if } j = 1,2,3 \\ (2, 7-j) & \text{if } j = 5,6,7 \end{cases},$$

である. 但し, $k' = k + (0,0,1)$ である. 定理 2.2 より, $\theta_1 = \theta_\Sigma(k, 6)$, $\theta_2 = \theta_\Sigma(k', 6)$ は $\mathsf{D}(\mathcal{A}_{\Sigma,k})$ の斉次基底を与える. 一般二項係数を求める事により, θ_1 の具体表示

$$\theta_1 = 2\left\{(3\,x^6 + 10\,x^5\,y + 10\,x^4\,y^2)\,\frac{\partial}{\partial x} - (5\,x^2\,y^4 + 2\,x\,y^5)\,\frac{\partial}{\partial y}\right\}$$

を得る. (図 2.3 参照. 各 $j = 1,2,3,5,6$ に対して, Young diagram $\mathbf{Y}(\lambda_j)$ が 2 個描かれている. 座標 $P \in \mathbf{Y}(\lambda_j)$ にある正方形の中の数字は, 上が $4 - c(P)$, 上が hook-length $h_{\lambda_j}(P)$ を表していて, 上の数字の総積を下の数字の総積で割った数字が $\binom{4}{\lambda_j}$ である.)

j	1	2	3	5	6
$4 - c(P)$	4 3 2 1 5 4	4 3 2 5 4	4 3 5 4	4 5	4
$h_{\lambda_j}(P)$	5 4 2 1 2 1	4 3 1 2 1	3 2 2 1	2 1	1
$\binom{4}{\lambda_j}$	6	20	20	10	4

図 2.3: Young diagrams $\mathbf{Y}(\lambda_{k,6}^{(j)})$

j	1	2	3	5	6	7
$5-c(P)$	5 4 3 2 1 / 6 5 4	5 4 3 2 / 6 5 4	5 4 3 / 6 5 4	5 4 / 6 5	5 4 / 6	5 4
$h_{\mu_j}(P)$	6 5 4 2 1 / 3 2 1	5 4 3 1 / 3 2 1	4 3 2 / 3 2 1	3 2 / 2 1	3 1 / 1	2 1
$\binom{5}{\mu_j}$	10	40	50	50	40	10

図 2.4: Young diagrams $\mathbf{Y}(\lambda_{k',6}^{(j)})$

同様に, 一般二項係数 $\binom{5}{\mu_j}$ を計算する事により, θ_2 の具体表示

$$\theta_2 = 10\,\{(x^6 + 4\,x^5\,y + 5\,x^4\,y^2)\,\frac{\partial}{\partial x} - (5\,x^2\,y^4 + 4\,x\,y^5 + y^6)\,\frac{\partial}{\partial y}\}$$

を得る. (図 2.4 参照.) $\theta_1(x+y)$, $\theta_2(x+y)$ 及び, $\det \mathtt{M}(\theta_1, \theta_2)$ を計算 (因数分解) すると,

$$\begin{aligned}
\theta_1(x+y) &= 2\,x\,(3\,x - 2\,y)\,(x+y)^4, \\
\theta_2(x+y) &= 10\,(x-y)\,(x+y)^5, \\
\det \mathtt{M}(\theta_1, \theta_2) &= -200\,x^4\,y^4\,(x+y)^4.
\end{aligned}$$

故に, Ziegler's criterion からも, (θ_1, θ_2) が $\mathrm{D}(\mathcal{A}_{\Sigma,k})$ の基底を与える事が確認できる. ——

例 2.5 $k = (5,5,5)$ の時. この時, $\lfloor |k|/2 \rfloor = 7$, $\lceil |k|/2 \rceil = 8$, $r_{k,7} = s_{k,7} = 2$, $r_{k,8} = s_{k,8} = 1$ で, 更に

$$\lambda_j := \lambda_{k,7}^{(j)} = \begin{cases} (6-j, 3, 3) & \text{if } j = 1,2,3 \\ (2,2,8-j) & \text{if } j = 6,7,8 \end{cases}, \quad \mu_j := \lambda_{k,8}^{(j)} = \begin{cases} (6-j, 2) & \text{if } j = 1,2,3,4 \\ (1, 7-j) & \text{if } j = 6,7 \end{cases}.$$

定理 2.2 より, $\theta_1 := \theta_\Sigma(k,7)$, $\theta_2 := \theta_\Sigma(k,8)$ は $\mathrm{D}(\mathcal{A}_{\Sigma,k})$ の斉次基底を与える. θ_1, θ_2 の具体表示は以下のようになる (図 2.5, 2.6 参照):

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= 25\,\{(2\,x^7 + 7\,x^6\,y + 7\,x^5\,y^2)\,\frac{\partial}{\partial x} + (7\,x^2\,y^5 + 7\,x\,y^6 + 2\,y^7)\,\frac{\partial}{\partial y}\}, \\
\theta_2 &= 5\,\{(2\,x^8 + 9x^7\,y + 15\,x^6\,y^2 + 10\,x^5\,y^3)\,\frac{\partial}{\partial x} - (3\,x^3\,y^5 + x^2\,y^6)\,\frac{\partial}{\partial y}\}.
\end{aligned}$$

$\theta_1(x+y)$, $\theta_2(x+y)$ 及び $\det \mathtt{M}(\theta_1, \theta_2)$ を因数分解すると,

$$\begin{aligned}
\theta_1(x+y) &= 25\,(x+y)^5\,(2\,x^2 - 3\,x\,y + 2\,y^2), \\
\theta_2(x+y) &= 5\,x^2\,(2\,x - y)\,(x+y)^5, \\
\det \mathtt{M}(\theta_1, \theta_2) &= -2500\,x^5\,y^5\,(x+y)^5.
\end{aligned}$$

故に, Ziegler's criterion からも, (θ_1, θ_2) が $\mathrm{D}(\mathcal{A}_{\Sigma,k})$ の基底を与える事が分る. ——

j	1	2	3	6	7	8
$5-c(P)$	$\begin{array}{lllll}5&4&3&2&1\\6&5&4\\7&6&5\end{array}$	$\begin{array}{llll}5&4&3&2\\6&5&4\\7&6&5\end{array}$	$\begin{array}{lll}5&4&3\\6&5&4\\7&6&5\end{array}$	$\begin{array}{ll}5&4\\6&5\\7&6\end{array}$	$\begin{array}{ll}5&4\\6&5\\7\end{array}$	$\begin{array}{ll}5&4\\6&5\end{array}$
$h_{\lambda_j}(P)$	$\begin{array}{lllll}7&6&5&2&1\\4&3&2\\3&2&1\end{array}$	$\begin{array}{llll}6&5&4&1\\4&3&2\\3&2&1\end{array}$	$\begin{array}{lll}5&4&3\\4&3&2\\3&2&1\end{array}$	$\begin{array}{ll}4&3\\3&2\\2&1\end{array}$	$\begin{array}{ll}4&2\\3&1\\1\end{array}$	$\begin{array}{ll}3&2\\2&1\end{array}$
$\binom{5}{\lambda_j}$	50	175	175	175	175	50

図 2.5: Young diagrams $\mathbf{Y}(\lambda_{k,7}^{(j)})$

j	1	2	3	4	6	7
$5-c(P)$	$\begin{array}{lllll}5&4&3&2&1\\6&5\end{array}$	$\begin{array}{llll}5&4&3&2\\6&5\end{array}$	$\begin{array}{lll}5&4&3\\6&5\end{array}$	$\begin{array}{ll}5&4\\6&5\end{array}$	$\begin{array}{l}5\\6\end{array}$	$\begin{array}{l}5\end{array}$
$h_{\mu_j}(P)$	$\begin{array}{lllll}6&5&3&2&1\\2&1\end{array}$	$\begin{array}{llll}5&4&2&1\\2&1\end{array}$	$\begin{array}{lll}4&3&1\\2&1\end{array}$	$\begin{array}{ll}3&2\\2&1\end{array}$	$\begin{array}{l}2\\1\end{array}$	$\begin{array}{l}1\end{array}$
$\binom{5}{\mu_j}$	10	45	75	50	15	5

図 2.6: Young diagrams $\mathbf{Y}(\lambda_{k,8}^{(j)})$

3 Schur 関数と一般二項係数

本節では, 主定理 (定理 2.2) の証明に必要な, 一般二項係数の性質をまとめておく. 特に, "Schur 関数" と呼ばれる多項式との関係を与えてる補題 3.3 や, それから得られる定理 3.5 は, [Wa] において重要な役割を果たしいる. まず次の結果は, 簡単ではあるが, 一般二項係数を導入する有効性を示す命題の一つである:

補題 3.1 $\lambda = (\lambda_i)_{i\geq 1}$ を partition とする. この時, $\lambda_1 \leq \forall r \in \mathbf{Q}$ に対して, $\binom{r}{\lambda} > 0$.

証明. 各 $(i,j) \in \mathbf{Y}(\lambda)$ に対して, $h_\lambda(i,j) > 0$ で,

$$c(i,j) = j - i \leq \lambda_i - i \leq \lambda_1 - i < \lambda_1 \leq r$$

であるから, $\binom{r}{\lambda} > 0$ が成立つ. ∎

正の整数 n を一つ固定しておく. $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n) \in \mathbf{N}^n$ に対して, n 変数多項式 $a_\mu = a_\mu(X_1, \cdots, X_n)$ を $a_\mu = \det(X_j{}^{\mu_i})_{ij} \in \mathbf{Z}[X_1, \cdots, X_n]$ で定める. $\delta := (n-1, \cdots, 2, 1, 0)$ と置けば, a_δ は n 変数の差積である: $a_\delta = \prod_{i<j}(X_i - X_j)$. 任意の $\mu \in \mathbf{N}^n$ に対して, a_μ は a_δ で割り切れる. それは, 各 (i,j) ; $i < j$ に対して, X_i に X_j を "代入" したものが 0 に等しいからである: $a_\mu(X_1, \cdots, \overset{i}{X_j}, \cdots, X_n) = 0$.

定義 3.2 λ を, その "長さ" $\ell(\lambda) := \#\{\, i \mid \lambda_i \neq 0 \,\}$ が n 以下の partition とする. ($\lambda \in \mathbf{N}^n$ と思える.) この時, 多項式 S_λ を $S_\lambda := a_{\lambda+\delta}/a_\delta$ で定め, λ に関する **Schur 関数** と呼ぶ.

次が, Schur 関数と一般二項係数とを結ぶ命題である:

補題 3.3 (I. G. Macdonald [Ma] p.45, Examples 4) λ を $\ell(\lambda) \leq n$ なる partition とする. この時,

$$S_\lambda(1, 1, \cdots, 1) = \binom{n}{\tilde{\lambda}}$$

が成立する. 但し, $\tilde{\lambda}$ は partition λ の "共役" と呼ばれるもので, λ の Young diagram を "主対角線" に関して折り返して得られる図形を Young diagram として持つ partition である. (例. $\lambda = (5, 4, 4, 1)$ ならば, その共役は, $\tilde{\lambda} = (4, 3, 3, 3, 1)$ である. 下図参照.)

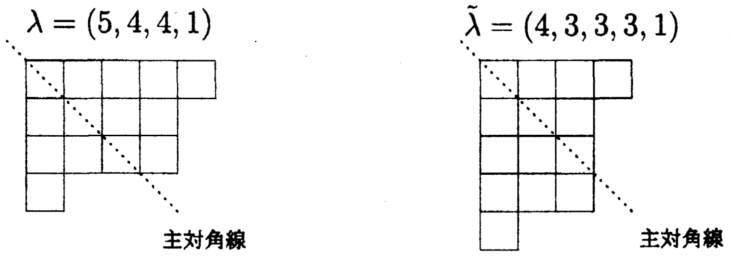

図 3.1: $(5, 4, 4, 1)$ の共役

各 a_μ は (行列式の性質から) "歪対称" であるので, $\ell(\lambda) \leq n$ なる任意の partition λ に対して, その Schur 関数 S_λ は対称式である. 故に, 基本対称式

$$e_r := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n} X_{i_1} \cdots X_{i_r}$$

達の多項式として表される. 具体的には,

$$S_\lambda = \det\left(e_{\tilde{\lambda}_i + c(i,j)} \right)_{1 \leq i,j \leq m} \quad (\lambda_1 \leq \forall m \in \mathbf{Z}_{>0})$$

が成立つ. (但し, $r < 0 \Rightarrow e_r = 0$ と定めておく.) よって, 補題 3.3 より次を得る:

補題 3.4 λ を $\ell(\lambda) \leq n$ なる partition とする. この時, $\lambda_1 \leq \forall m \in \mathbf{Z}_{>0}$ に対して,

$$\binom{n}{\tilde{\lambda}} = \det\left(\binom{n}{\tilde{\lambda}_i + c(i,j)} \right)_{1 \leq i,j \leq m}$$

が成立つ.

この事が, 任意の $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ で成立することから, 次の定理を得る:

定理 3.5 (I. G. Macdonald [Ma] p.45, Examples 4) λ を partition, m を正の整数とする. $\ell(\lambda) \leq m$ である時,

$$\binom{X}{\lambda} = \det\left(\binom{X}{\lambda_i + c(i,j)} \right)_{1 \leq i,j \leq m}.$$

4 定理 2.2 の証明の概要

ここでは, 前節の結果 (特に, 定理 3.5) が, 主定理 (定理 2.2) の証明にどのように適用されていくのかを見ていく. まず, V^* の基底 $\Sigma = (x, y)$ 及び $k = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbf{N}_0^3$ を固定しておき, $\tilde{A} := \mathcal{A}_{\Sigma,k}$ と置く. 各 $q \in \mathbf{Z}$ に対して, $r_q := r_{k,q} = k_1 + k_2 - q - 1$, $s_q := s_{k,q} = k_1 + k_3 - q - 1$ (§2 で定義したもの), $t_q := q - k_3 + 1$ と置く. $k_3 \le q \le k_1 + k_2 - 1$ を満たす整数 q に対して, 行列 M_q を

$$M_q := \left(\binom{k_3}{k_3 + c(i,j)} \right)_{\substack{1 \le i \le q+1 \\ 1 \le j \le t_q}}$$

で定める. この時, 次の基本的な関係式が成立つ:

$$(X^q, X^{q-1}Y, \cdots, Y^q)\, M_q = (X+Y)^{k_3} (X^{q-k_3}, X^{q-k_3-1}Y, \cdots, Y^{q-k_3}). \tag{4.1}$$

行列 M_q の最初の $q - k_1 + 1$ 行からなる行列を A_q, 最後の $q - k_2 + 1$ 行からなる行列を B_q, 残りの部分からなる行列を C_q とする:

$$M_q = \begin{pmatrix} A_q \\ C_q \\ B_q \end{pmatrix}.$$

更に, q 次の多項式を成分とする, 長さ t_q の "横ベクトル" $\boldsymbol{f}_q$, $\boldsymbol{g}_q$ を

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_q &= (x^q, x^{q-1}y, \cdots, x^{k_1} y^{q-k_1})\, A_q, \\ \boldsymbol{g}_q &= (x^{q-k_2} y^{k_2}, \cdots, x y^{q-1}, y^q)\, B_q \end{aligned}$$

で定める. $\mathbf{K}$-線型写像 $\rho_q \colon \mathbf{K}^{t_q} \longrightarrow (\mathrm{Der}_S)_q$ (q 次導分全体) を

$$\rho_q(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}_q \boldsymbol{u} \frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{g}_q \boldsymbol{u} \frac{\partial}{\partial y} \tag{4.2}$$

で定めれば, ρ_q は単射で, $\ker C_q$ を $\mathsf{D}(\tilde{A})_q = \mathsf{D}(\tilde{A}) \cap (\mathrm{Der}_S)_q$ へ写す. 即ち, $\mathbf{K}$-同型 $\mathsf{D}(\tilde{A})_q \simeq \ker C_q$ が成立つ. (厳密に言うと, $q = k_1 + k_2 - 1$ の時は, 行列 C_q は "潰れている". この時は, $\ker C_q = \mathbf{K}^{t_q}$ としておく.) 故に, $\tilde{A}$ に接する $\mathbf{K}$-導分の話が, 二項係数を成分とする行列 ≒ 一般二項係数 (定理 3.5) の議論に帰着される. 例えば, 次が成立つ:

補題 4.1 任意の $q \in \mathbf{Z}$; $k_3 \le q < \lfloor |k|/2 \rfloor$ に対して $\mathsf{D}(\tilde{A})_q = 0$.

証明. まず, $k_3 \le q < \lfloor |k|/2 \rfloor$ の時, $0 < t_q \le r_q$ であるから, 行列 M_q が定義でき, C_q は "潰れない" で, "縦長" の行列になっている事に注意する. C_q の 最初の t_q 行からなる正方行列を C とする: $C = \left(\binom{k_3}{s_q + c(i,j)} \right)_{1 \le i,j \le t_q}$. 故に, partition λ を

$$\lambda := (\overbrace{s_q, \cdots, s_q}^{t_q})$$

で定めれば, 定理 3.5 より, $\det C = \binom{k_3}{\lambda}$. ところで, $k_3 \ge s_q$ であるから, 補題 3.1 より, $\det C \ne 0$ を得る. よって, $\mathsf{D}(\tilde{A})_q \simeq \ker C_q = 0$ を得る. ∎

以上より, (多少の 2-multiarrangement に関する議論を用いて,) exponents に関する次の結果を得る:

系 4.2 ([Wa] Proposition 3.11) $k_3 \le k_1 + k_2 \;\Rightarrow\; \exp(\tilde{\mathcal{A}}) = [\,\lfloor |k|/2 \rfloor, \lceil |k|/2 \rceil\,]$.

$(\mathsf{D}(\tilde{\mathcal{A}})_q \neq 0$ となる, $q \in \mathbf{Z}$ の最小値が, $\lfloor |k|/2 \rfloor$ である事を確認すればよい. あとは Ziegler's criterion を適用して, 上記が得られる.) これで, 3 本の直線からなる 2-multiarrangement に関しては, その exponents が完全に記述できた事になる.

さて, 基底構成において最も重要である, §2 で定めた q 次導分 $\theta_\Sigma(k,q)$ が $\tilde{\mathcal{A}}$ に接することを示す. もう少し詳しく次が成立つ:

補題 4.3 ([Wa] Lemma 3.14) $\theta_\Sigma(k,q) \in \mathsf{D}(\tilde{\mathcal{A}}) \setminus \mathsf{D}(\mathcal{A}_{\Sigma,k'})$. 但し, $k' = k + (0,0,1)$.

証明. まず, $\theta_\Sigma(k,q)$ が $\tilde{\mathcal{A}}$ に接する事をみる. $\boldsymbol{u}_q \in \mathbf{K}^{t_q}$ を

$$\boldsymbol{u}_q := {}^t\!\left(\binom{k_3}{\mu_1}, -\binom{k_3}{\mu_2}, \cdots, (-1)^{r_q-1}\binom{k_3}{\mu_{r_q}}, (-1)^{r_q}\binom{k_3}{\mu}, 0, \cdots, 0 \right) \in \mathbf{K}^{t_q}$$

で定める. 但し, partitions μ, μ_i $(i = 1, \cdots, r_q)$ は, 以下で与えられる:

$$\mu := (\overbrace{s_q, \cdots, s_q}^{r_q}), \quad \mu_i := (\overbrace{s_q+1, \cdots, s_q+1}^{r_q-i+1}, \overbrace{s_q, \cdots, s_q}^{i-1}).$$

この時, 定理 3.5 及び, 行列式の余因子展開から, $\boldsymbol{u}_q \in \ker C_q$ で $\theta_\Sigma(k,q) = \rho_q(\boldsymbol{u}_q)$ が成立つ事が確認できる. 即ち, $\theta_\Sigma(k,q)$ は multiarrangement $\tilde{\mathcal{A}}$ に接することが言える.

次に, $\theta_\Sigma(k,q)$ が, 直線 $x+y=0$ に (k_3+1) 重に接しない事をみる. 式 (4.1) より, $\forall \boldsymbol{u} = {}^t(u_1, \cdots, u_{t_q}) \in \ker C_q$ に対して,

$$[\rho_q(\boldsymbol{u})](x+y) = (x+y)^{k_3}\,(x^{q-k_3}, x^{q-k_3-1}y, \cdots, y^{q-k_3})\,\boldsymbol{u}$$

が成立つ. 故に,

$$\begin{aligned} \rho_q(\boldsymbol{u}) \in \mathsf{D}(\mathcal{A}_{\Sigma,k'}) &\iff (x^{q-k_3}, x^{q-k_3-1}y, \cdots, y^{q-k_3})\,\boldsymbol{u} \in (x+y)S \\ &\iff \sum\nolimits_{i=1}^{t_q} (-1)^{i-1}u_i = 0. \end{aligned}$$

ところで, $k_3 \ge s_q + 1$ であるから, 補題 3.1 より, $c, c_i > 0$ である. よって, $\boldsymbol{u}_q$ の成分の交代和 $\sum_{i=1}^{t_q} c_i + c$ は > 0 となり, $\theta_\Sigma(k,q) = \rho_q(\boldsymbol{u}) \notin \mathsf{D}(\mathcal{A}_{\Sigma,k'})$ を得る. ∎

$(\theta_\Sigma(k,q)$ が $x+y=0$ に (k_3+1) 重に接しないという事実は, $|k|$ が偶数の時の基底構成において, 必要になってくる.) 後は, 次数 S-加群 $M = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} M_n$ に関する, 次の命題が確認できれば, 定理 2.2 (ii) の証明が完了する:

補題 4.4 $p, q\,;\, p \le q$ を整数とし, $d := q - p$ と置く. M が, 次数 p の元と次数 q の元とからなる基底をもつとする. この時, $\theta_1 \in M_p$, $\theta_2 \in M_q$ に対して,

$$(\theta_1, \theta_2) : M \text{ の } S\text{-基底} \iff x^d\theta_1, x^{d-1}y\,\theta_1, \cdots, y^d\theta_1, \theta_2 : \mathbf{K} \text{ 上一次独立}$$

が成立つ.

以上を用いて, 定理 2.2 (ii) の証明を与えておく:

定理 2.2 (ii) の証明. $k' := k + (0,0,1)$, $q := \lfloor |k|/2 \rfloor$ と置く.

- $|k|$ が偶数の時.

$$
\begin{aligned}
&\theta_\Sigma(k,q) \text{ が } x+y=0 \text{ に } (k_3+1) \text{ 重に接しない} \\
&\quad\Longrightarrow\ \theta_\Sigma(k,q),\ \theta_\Sigma(k',q) : \mathbf{K} \text{ 上一次独立} \\
&\quad\Longrightarrow\ \big(\,\theta_\Sigma(k,q), \theta_\Sigma(k',q)\,\big) : \mathsf{D}(\tilde{\mathcal{A}}) \text{ の基底 (系 4.2, 補題 4.4)}
\end{aligned}
$$

- $|k|$ が奇数の時.

$$
\begin{aligned}
&\binom{\boldsymbol{u}_q}{0},\ \binom{0}{\boldsymbol{u}_q},\ \boldsymbol{u}_{q+1} \in \mathbf{K}^{t_q+1} : \mathbf{K} \text{ 上一次独立} \\
&\quad\Longrightarrow\ x\,\theta_\Sigma(k,q),\ y\,\theta_\Sigma(k,q),\ \theta_\Sigma(k,q+1) : \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{K} \text{ 上一次独立 } (\rho_{q+1} \text{ の単射性}) \\
&\quad\Longrightarrow\ \big(\,\theta_\Sigma(k,q), \theta_\Sigma(k,q+1)\,\big) : \mathsf{D}(\tilde{\mathcal{A}}) \text{ の基底 (系 4.2, 補題 4.4)}
\end{aligned}
$$

以上で, 証明が完了する. ∎

5 今後の課題

5.1 本数の一般化

定理 2.2 の結果の延長として, 自然に考えられるのは, n 本直線がある場合への一般化である. 即ち n 本直線がある 2-multiarrangement $\tilde{\mathcal{A}}$ の exponents $\exp(\tilde{\mathcal{A}})$ の決定, もしくは, 微分加群 $\mathsf{D}(\tilde{\mathcal{A}})$ の斉次基底の構成である. 直線が 4 本以上の場合には, exponents は multiplicity だけではなく, "複比" と呼ばれる幾何学的な量にも支配される. すなわち, multiplicity が等しいような multiarrangement でも, 直線の "配置" によって, その exponents が変わってくるのである. 一つ例を見ておく.

例 5.1 (x,y) を V^* の $\mathbf{K}$-基底とし, $\mathcal{A} = \{\ \ker x,\ \ker y,\ \ker(x+y),\ \ker(x+cy)\ \}$ $(c \in \mathbf{K} \setminus \{0,1\})$ と置く. $\mathcal{A}$ 上の multiplicity $k\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathbf{N}$ を

$$\ker x \mapsto 1,\quad \ker y \mapsto 3,\quad \ker(x+y) \mapsto 3,\quad \ker(x+cy) \mapsto 1$$

と定める時, $\exp(\mathcal{A},k)$ に関して, 次が成立つ:

$$\exp(\mathcal{A},k) = \begin{cases} [3,5] & \text{if } c = 2, \\ [4,4] & \text{if } c \neq 2. \end{cases}$$

(次数 3 の導分 $(x^3+3x^2y+3xy^2)\frac{\partial}{\partial x} + y^3\frac{\partial}{\partial y}$ が, 直線 $x+cy=0$ に接する条件が $c=2$ で与えられる. この c が言わば, 複比にあたるものである.) ——

この複比と呼ばれるものによって, 4 本以上の場合の exponents の決定は 3 本の場合に比べて, 著しく難しくなると考えられる.

5.2 原始微分との関係

また, 定理 2.2 は, A_2 型の "コクセター配置" に関する結果だと考えることもできる.

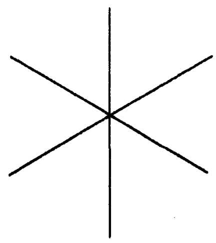

図 5.1: A_2 型コクセター配置

そう考えた時, 重要になってくるのが, K. Saito [Sa2] による "原始微分" の存在である. 一般に, $\mathcal{A}$ をコクセター配置とする時, 次が知られている:

定理 5.2 (H. Terao [Te1]) 任意の $m \in \mathbf{N}$ に対して,

$$\mathsf{D}^{(m)}(\mathcal{A}) := \{ \, \theta \in \mathrm{Der}_S \mid \theta(\alpha_H) \in \alpha_H^m S \quad (\forall H \in \mathcal{A}) \, \}$$

は free である.

その証明は具体的に基底を構成して与えているのだが, その際, 原始微分 D が本質的に用いられている. また, [Te2] では, 原始微分 D の "Levi-Civita 接続" ∇_D の重要性に着目し, [Te1] で構成した基底が, ∇_D によってよい振る舞いをする事を示している. 一方, M. Yoshinaga [Yo1] では, 定理 5.2 の別証明を, [Sa2] によって保障されている, ∇_D のある種の逆写像 ∇_D^{-1} を用いて与えている. 具体的には, $\nabla_D^{-k}E$ (E は "オイラー導分") を基本的な導分として, $\mathsf{D}^{(m)}(\mathcal{A})$ の基底を構成している. この Terao 基底と Yoshinaga 基底は, [Te2] を "介して", 密接に関係している事がわかり, [Te3] では, 具体的にその関係を与えている.

そこで, 定理 2.2 を A_2 型のコクセター配置に関する結果だと見るとき, 一般二項係数を用いて構成した基底が原始微分 (の Levi-Civita 接続) によってどのように振舞うのか, というのは極めて自然な疑問であると考えられる. それを元に, Terao 基底や Yoshinaga 基底との関係が与えられれば, と考えている.

参考文献

[Ma] I. G. MACDONALD : Symmetric Functions and Hall Polynomials 2nd edition. Oxford Univ. Press, 1995.

[OT] P. ORLIK and H. TERAO : Arrangements of Hyperplanes. Grundlehren der Math. Wiss. **300**, Springer-Verlag, 1992.

[Sa1] K. SAITO : Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect.IA Math. **27**, 1980, pp. 265-291.

[Sa2] K. SAITO : On a linear structure of the quotient variety by a finite reflection group. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **29**, no. 4, 1993, pp. 535-579.

[Te1] H. TERAO : Multiderivations of Coxeter arrangements. Invent. Math. **148**, no. 3, 2002, pp. 659-674.

[Te2] H. TERAO : The Hodge filtration and the contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. Manuscripta Math. **118**, 2005, pp. 1-9.

[Te3] H. TERAO : Bases of the contact-order filtration of derivations of Coxeter arrangements. Proc. Amer. Math. Soc. **133**, no. 7, 2005, pp. 2029-2034.

[Wa] A. WAKAMIKO : On the exponents of 2-multiarrangements. Master's thesis, Tokyo Metropolitan University (Japanese).

[Yo1] M. YOSHINAGA : The primitive derivation and freeness of multi-Coxeter arrangements. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **78**, no. 7, 2002, pp. 116-119.

[Yo2] M. YOSHINAGA : On the freeness of 3-arrangements. Bull. London Math. Soc. **37**, 2005, pp. 126-134.

[Zi] G. M. ZIEGLER : Multiarrangements of hyperplanes and their freeness. In: Singularities, Contemporary Math. **90**, Amer. Math. Soc., 1989, pp. 345-359.